

A- Généralités :

I. Introduction:

L'étude en RDM est une étape parfois nécessaire entre la conception et la réalisation d'une pièce. Elle permet :

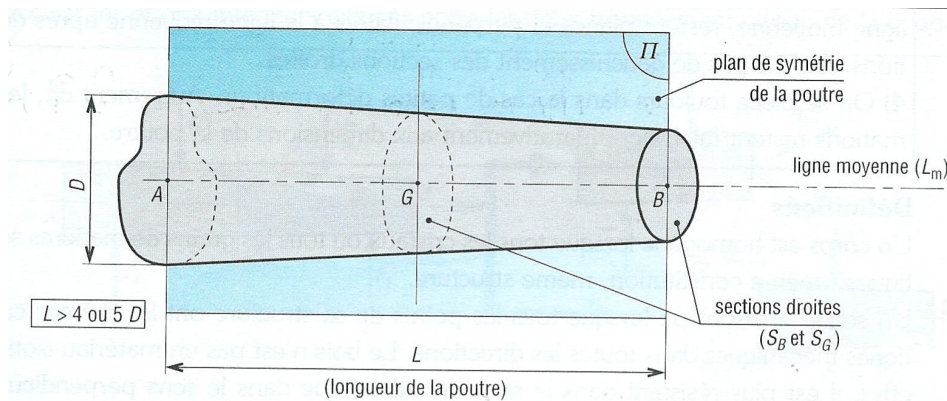
- de justifier son dimensionnement
- de déterminer le choix du matériaux
- de limiter son coût.

Elle permettra également d'évaluer ses déformations éventuelles, et donc sa durée de vie.

II. Notion de poutre :

La RDM est une science expérimentale, dont les relations sont établies à partir d'un modèle appelé **poutre**. On désigne par poutre un solide dont la section varie progressivement.

La **ligne moyenne** de la poutre est le lieu des centres de surfaces des sections droites successives . Les **sections droites** sont les sections planes et perpendiculaires à la ligne moyenne de la poutre.



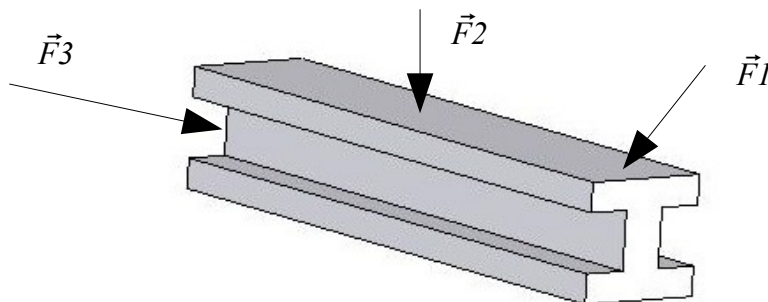
Hypothèses :

- Les matériaux sont homogènes et isotropes (mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions).
- Toutes les forces extérieures exercées sur la poutre sont contenues dans le plan de symétrie.
- Les sections droites restent perpendiculaires à l'axe de la poutre.
- On se place toujours dans le cas de petites déformations, faibles devant les dimensions de la poutre.

Afin de rapprocher le modèle théorique du phénomène réel, on affecte aux résultats des coefficients de sécurité tenant compte du contexte dans lequel évolue la pièce étudiée.

III. Notion de sollicitations :

La poutre ci-dessous est soumise à des efforts extérieurs. La direction et le sens de ces efforts par rapport à la ligne moyenne définissent le type de **sollicitation** que subit la poutre.

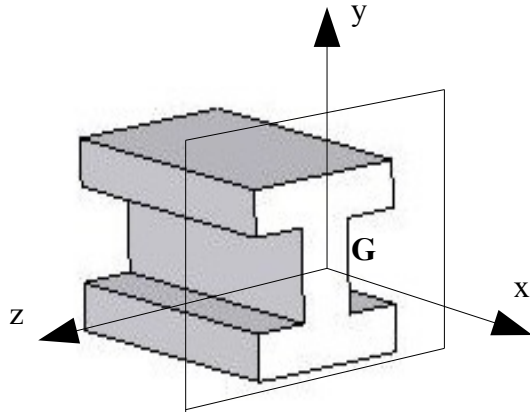


Afin de déterminer à quel type de sollicitations est soumise cette poutre, on la divise virtuellement en deux tronçons, et on « isole » la partie gauche.

Torseur de cohésion :

L'action du tronçon droit sur le tronçon gauche est une action d'encastrement qui se modélise par un torseur d'inter-effort.

La réduction de ce torseur au point G, centre de la section, est appelé torseur des forces de cohésion.



NOTATION :

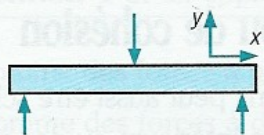
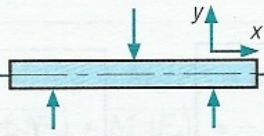
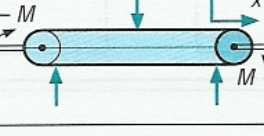

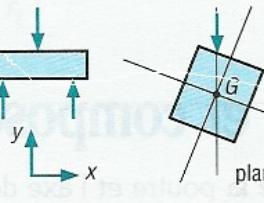
$$\left\{ \begin{matrix} T_{gcoh} \\ G \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} N & Mt \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{matrix} \right\}_G$$

- N : effort normal
- Ty : effort tranchant
- Tz : effort tranchant
- Mt : moment de torsion.
- Mfy : moment fléchissant
- Mfz : moment fléchissant

Sollicitations simples :

Cas	Exemple	Composantes				Observations
		N	T	M _T	M _f	
traction		N	0	0	0	Sollicitations simples
cisaillement		0	T	0	0	
torsion		0	0	M _T	0	
flexion pure		0	0	0	M _{fz}	

Sollicitations composées :

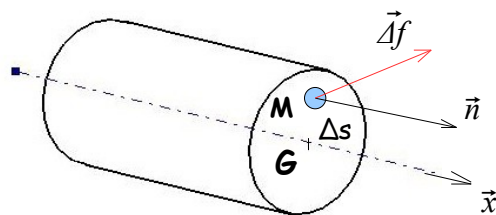
flexion simple		0	T_y	0	M_{Iz}	Sollicitations composées
flexion + traction		N	T_y	0	M_{Iz}	
flexion + torsion		0	T_y	M_T	M_{Iz}	
flambage		N	0	0	M_{Iz}	
flexion déviée		0	T_y	0	M_{Iz}	
			T_z	0	M_{Iy}	

IV. Notions de contraintes :

Le tenseur de cohésion permet d'exprimer les actions mécaniques internes exercées par le tronçon 2 sur le tronçon 1 de la poutre au point de réduction G , centre de la section. Mais il ne permet pas de définir la répartition de ces efforts dans la surface de la section.

Pour cela, on fait appel à la notion de **contrainte**.

- Δs : élément de surface de centre M .
- $\Delta \vec{f}$: effort élémentaire exercé sur Δs .
- \vec{n} : vecteur unitaire normal à Δs .



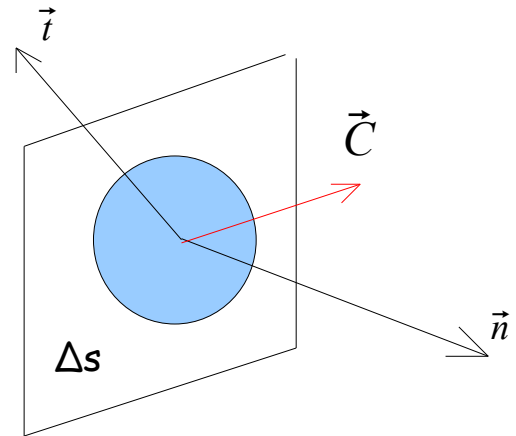
Vecteur contrainte au point M :

Unité : $1 \text{ N} / \text{mm}^2 = 1 \text{ MPa}$ $\vec{C}(M; \vec{n}) = \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta s}$

1. Composantes normales et tangentielles :

- \vec{n} : vecteur unitaire normal à Δs .
- \vec{t} : vecteur unitaire tangent à Δs (t appartient au plan de la section).
- σ : contrainte normale
- τ : contrainte tangentielle

$$\vec{C} = \sigma \cdot \vec{n} + \tau \cdot \vec{t}$$



Contrainte prédominante :

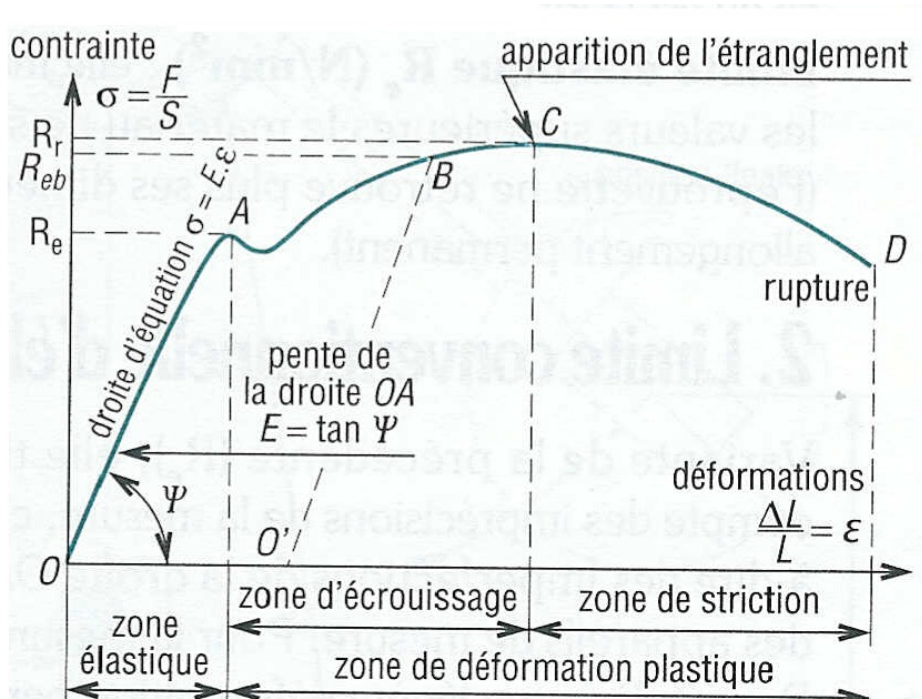
Selon la sollicitation à laquelle est soumise la poutre, la contrainte prédominante sera la contrainte normale ou la contrainte tangentielle (voir tableau des sollicitations.)

B- Caractéristiques des matériaux :

Les caractéristiques des différents matériaux sont définis à partir d'essais effectués sur des éprouvettes normalisées. Le plus classique est l'essai de traction, qui permet d'établir, pour le matériau testé, une courbe « contraintes /déformation ».

I. Courbes contraintes/déformations :

Pour un grand nombre de matériaux, la courbe obtenue présente l'allure ci-dessous.



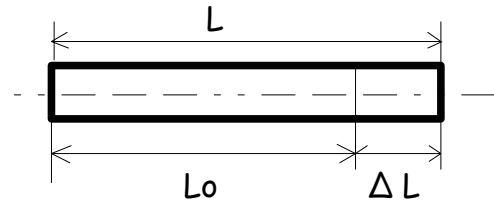
II. Définitions :

On remarque une zone, appelée domaine élastique, où le graphe est une droite (segment OA). Pour tous les points de cette droite, la déformation ε est proportionnelle à la contrainte σ (donc à l'effort exercé), et le matériau est parfaitement élastique.

Allongement relatif, ou déformation ε :

- L_0 : longueur avant déformation (mm)
- L : longueur après déformation (mm)
- ΔL : allongement de la poutre (mm)

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$



Module d'élasticité longitudinale E (ou module de Young) :

Cette grandeur caractérise la pente de la droite et l'élasticité du matériau dans le sens longitudinal, selon la proportionnalité entre contrainte et déformation (loi de Hooke) :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{Unité : N/mm}^2 \text{ (ou MPa)}$$

Plus E est grand, plus le matériau est rigide et inversement.

Exemple : E aciers = 200 000 N/mm² , E élastomères = 1 N/mm².

Limite élastique Re :

Cette contrainte marque la fin du domaine élastique. Pour les valeurs supérieures, le matériau ne se déforme plus élastiquement, mais plastiquement; il subsiste après déformation un allongement permanent.

Module d'élasticité transversal G (ou module de Coulomb) :

Caractérise l'élasticité du matériau dans le sens transversal de l'éprouvette. Cette grandeur est proportionnelle au module de Young, en fonction du coefficient de Poisson ν , propre à chaque matériau :

$$\text{Unité : N/mm}^2 \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Résistance élastique au cisaillement (ou glissement) Reg:

Cette contrainte, proportionnelle à Re, marque la limite élastique du matériau dans le sens transversal.

Acier doux $Re \leq 250$ MPa	$Reg = 0,5 Re$
Acier mi-dur $320 \leq Re \leq 500$ MPa	$Reg = 0,7 Re$
Acier dur $Re \geq 600$ MPa et fontes	$Reg = 0,8 Re$

Autres caractéristiques :

D'autres types d'essai permettent de définir d'autres caractéristiques des matériaux, tels que :

Ductilité : aptitude d'un matériau à se déformer sans se rompre, caractérisé par un allongement pour cent A% : plus A% est grand, plus le matériau est ductile, propriété déterminante pour l'emboutissage, le pliage...

Dureté : capacité du matériau à résister au marquage (rayures..), à l'usure, à l'érosion.

Résilience : capacité du matériau à absorber les chocs sans se rompre.

Résistance à la fatigue : Soumis à des charges alternées et continues, le matériau peut atteindre le seuil de rupture sous des efforts inférieurs aux limites usuelles R_r et R_e .

....

III. Condition de résistance :

Pour qu'une pièce résiste aux sollicitations, il faut être certain de rester dans la zone de déformation élastique. On se fixe donc un seuil à ne pas dépasser, à l'aide d'un coefficient de sécurité : s . Selon le type de contrainte, ce seuil est appelé **Contrainte admissible**, ou encore **Résistance pratique à l'extension (R_{pe}) et Résistance pratique au cisaillement (R_{pg})** :

$$R_{pe} = R_e / s \quad \text{et} \quad R_{pg} = R_g / s$$

Valeurs indicatives				
s	Charges exercées sur la structure	Contraintes dans la structure	Comportement du matériau	Observations
$1 < s < 2$	régulières et connues	connues	testé et connu	fonctionnement constant sans à-coups
$2 < s < 3$	régulières et assez bien connues	assez bien connues	testé et connu moyennement	fonctionnement usuel
$3 < s < 6$	moyennement connues	moyennement connues	non testé	avec légers chocs et surcharges
	mal connues ou incertaines	mal connues ou incertaines	connu	modérées

La contrainte maximale que peut supporter une pièce dépend donc :

- du matériau choisi

(caractérisé lors de l'étude par les modules d'élasticité transversal et longitudinal, et par la résistance élastique...)

- du type de fonctionnement du mécanisme :

(fréquence, chocs éventuels, contraintes de construction ... caractérisé par le coef. de sécurité)

La contrainte effective à laquelle est soumise la pièce est fonction :

- du type et de l'importance des sollicitations.

(modélisées par le tenseur de cohésion, elles sont liées aux actions exercées sur la pièce. Une étude statique est donc nécessaire avant toute étude RDM.)

- de sa section.

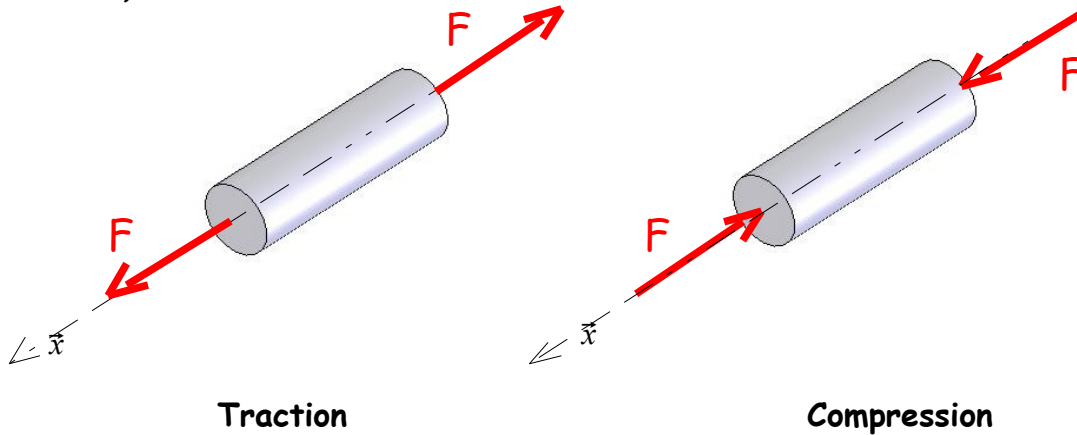
(l'étude est effectuée sur la section la plus sollicitée)

L'étude RDM vérifie que la contrainte effective à laquelle est soumise la pièce reste inférieure à la contrainte maxi admissible. C'est la condition de résistance.

C- Sollicitations simples :

I. Traction / compression :

Une poutre est sollicitée en traction simple (en compression) lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées, appliquées au centre des surfaces extrêmes, qui tendent à l'allonger (à la raccourcir).



Torseur de cohésion dans (G; x ; y ; z) :

$$\left\{ \mathbf{T}_{\text{coh}} \right\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

Si $N > 0$ traction
Si $N < 0$ compression

Contrainte :

La contrainte est répartie de façon uniforme dans toute la section S.

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

N : effort normal (N)
S : section sollicitée (mm²)
 σ : contrainte normale (MPa ou N/mm²)

Déformation, loi de Hooke :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{et} \quad \varepsilon = \Delta \frac{L}{L} \quad \text{donc} \quad \Delta L = \frac{N \cdot L_0}{E \cdot S}$$

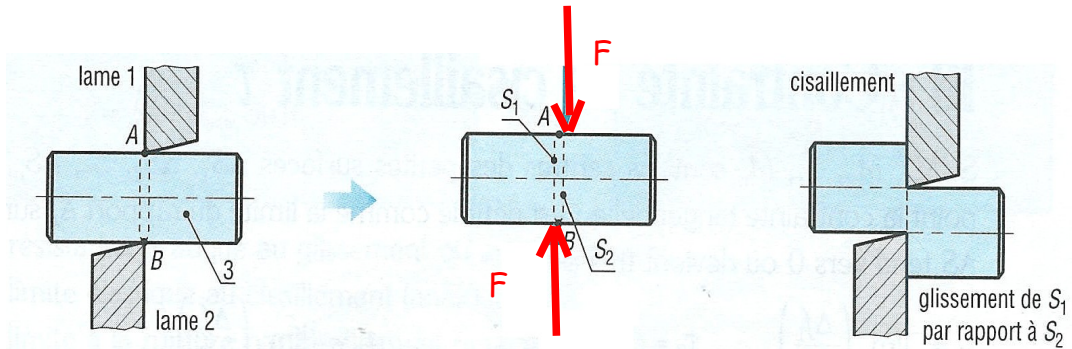
Condition de résistance :

$$\sigma_{\text{maxi}} \leq R_{pe} \quad \text{avec} \quad R_{pe} = R_e / s$$

$$\sigma_{\text{maxi}} = \frac{N}{S} \leq R_{pe}$$

II. Cisaillement :

Une poutre est sollicitée au cisaillement si elle est soumise à des actions qui se réduisent à deux forces directement opposées, dans le même plan P perpendiculaire à la ligne moyenne.



Torseur de cohésion dans (G; x ; y ; z) :

$$\left\{ \begin{matrix} T_{gcoh} \\ G \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{pmatrix}_G$$

La condition $M_f = 0$ n'est que très rarement remplie, on ne peut négliger M_f qu'en prenant un coefficient de sécurité important, de l'ordre de 5, pour le calcul de résistance au cisaillement.

Contrainte :

La contrainte est répartie de façon uniforme dans toute la section cisillée S.

$$\tau = \frac{T}{S}$$

T : effort tangentiel (N) $T = \sqrt{(T_y^2 + T_z^2)}$
 S : section cisillée (mm²)
 τ : contrainte tangentielle (MPa ou N/mm²)

Déformation, module de Coulomb :

Au cours de l'essai, la section (S') glisse transversalement par rapport à (S). Ce glissement se fait sans déformations internes.

$$\tau = G \cdot \gamma$$

γ : glissement relatif (sans unités)
 G : module d'élasticité transversale ou module de Coulomb. (MPa)

Condition de résistance :

$$\tau_{maxi} \leq R_{pg} \text{ avec } R_{pg} = R_{eg} / s$$

$$\tau_{maxi} = \frac{T}{S} \leq R_{pg}$$

III. MOMENTS QUADRATIQUES :

Moment quadratique d'une surface par rapport à un axe :

Les moments quadratiques de l'élément de surface ΔS par rapport aux axes x et y sont :

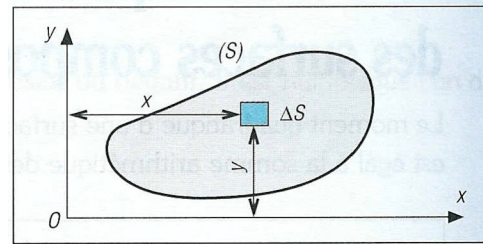
$$\Delta I_x = y^2 \cdot \Delta S$$

$$\Delta I_y = x^2 \cdot \Delta S$$

Les moments quadratiques de la surface complète sont :

$$I_x = \sum y^2 \cdot \Delta S = \int y^2 \cdot dS \quad \text{unités : mm}^4$$

$$I_y = \sum x^2 \cdot \Delta S = \int x^2 \cdot dS$$



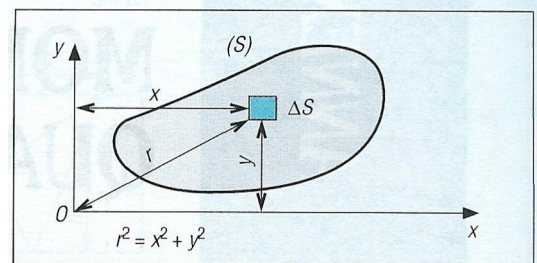
Moment quadratique d'une surface par rapport à un point :

Le moment quadratique de l'élément de surface ΔS par rapport au point A, ou moment polaire, est :

$$\Delta I_o = r^2 \cdot \Delta S$$

Le moment quadratique polaire de la surface complète S est égal à :

$$I_o = \sum r^2 \cdot \Delta S = \int r^2 \cdot dS \quad \text{unités : mm}^4$$



Propriétés :

$$I_o = I_x + I_y$$

Le moment quadratique par rapport au pôle O est égal à la somme des moments quadratiques par rapport aux axes x et y .

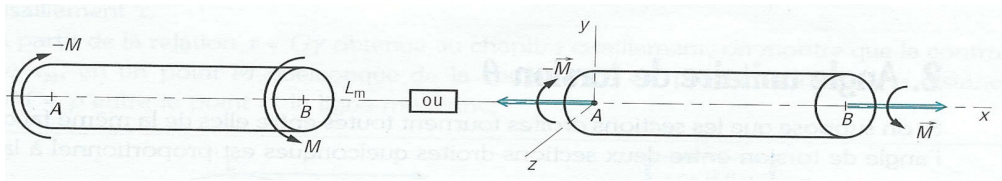
Expression des moments quadratiques usuels :

Section de la poutre	Moment quadratique	Moment quadratique polaire
	$I_{Gz} = I_{Gy} = \Pi \frac{d^4}{64}$	$I_G = \Pi \frac{d^4}{32}$
	$I_{Gz} = \frac{(b \cdot h^3)}{12}$ $I_{Gy} = \frac{(h \cdot b^3)}{12}$	$I_G = b \cdot h \frac{(b^2 + h^2)}{12}$

IV. Torsion :

Définition :

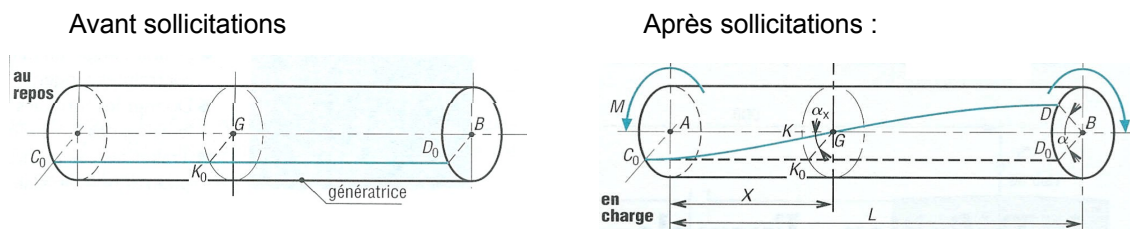
Une poutre est sollicitée à la torsion lorsqu'elle est soumise à deux couples d'axes l'axe de la poutre, et situés dans les sections droites des extrémités.



Torseurs de cohésion , dans (G;x;y;z) :

$$\left\{ \mathbf{T}_{\text{coh}} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_G$$

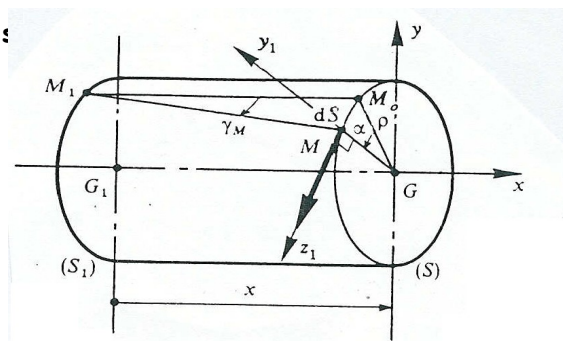
Contraintes/déformations :



a. Angle unitaire de torsion :

C'est la déformation angulaire relative entre deux sections distantes d'une longueur x .

$$\theta = \frac{\alpha}{x} \quad \text{unité : rad / mm}$$



b. Loi de HOOKE :

G : module de Coulomb (MPa)
 γ : déviation d'une fibre (rad)

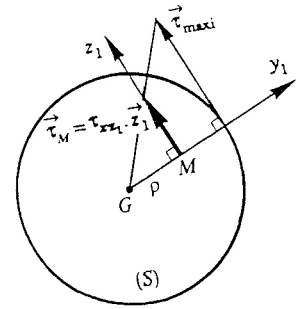
$$\tau = G \cdot \gamma$$

c. Répartition des contraintes :

Elle est proportionnelle à la distance entre la fibre sollicitée et la fibre neutre.

Pour M quelconque

$$\tau = G \cdot \theta \cdot \rho \quad \text{avec : } \rho = \overline{GM}$$



La contrainte maxi se situe au point le plus éloigné de la fibre neutre.

d. Relation entre moment et angle de torsion :

IG : moment quadratique polaire.

v : distance entre la fibre neutre et la fibre la plus éloignée de la section .

$\frac{IG}{v}$: module de torsion. Unité : mm³

$$\text{Rappel : } IG = \Pi \frac{d^4}{32}$$

$$\boxed{Mt = G \times \theta \times IG} \quad \text{on en déduit : } \boxed{\tau = \frac{Mt}{\left(\frac{IG}{v}\right)}}$$

Condition de résistance :

$$\boxed{\tau_{maxi} \leq Rpg} \quad \text{Ou encore} \quad \boxed{\tau = \frac{Mt}{\left(\frac{IG}{v}\right)} \text{ ou } \leq Rpg}$$

V. FLEXION :

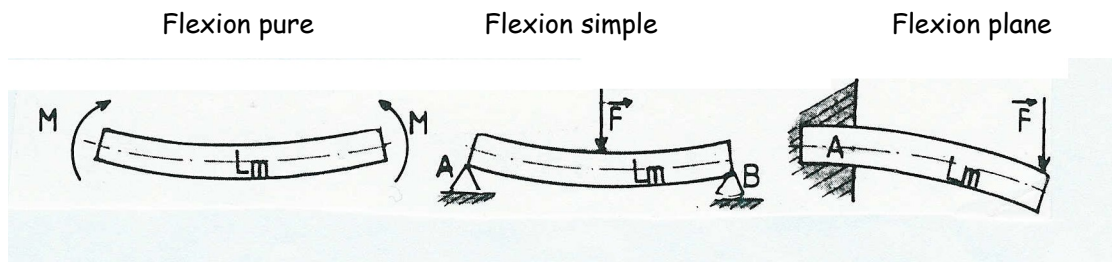
1. Définition :

a. Hypothèses :

- Hypothèses générales de la RDM
- La poutre possède un axe de symétrie longitudinal.
- Les forces extérieures à la poutre sont contenues dans le plan de symétrie.

b. Différents types de flexion :

Une poutre est soumise à une sollicitation de flexion chaque fois qu'il y a fléchissement de la ligne moyenne. On discerne trois types de flexion :



Torseurs de cohésion, dans (G;x;y;z) :

$$\left\{ \mathbf{T}_{\text{gcoh}} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{array} \right\}_G \quad \text{Flexion pure}$$

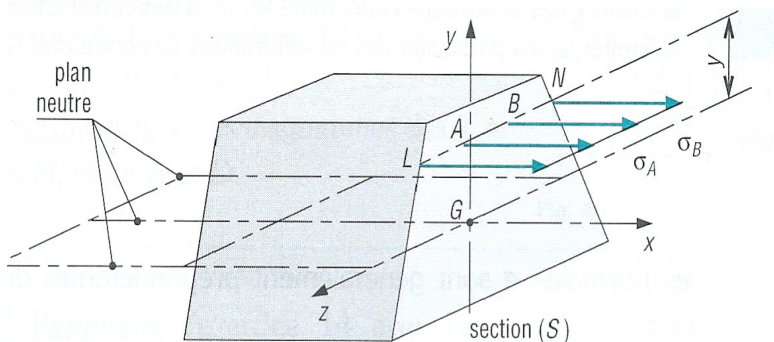
$$\left\{ \mathbf{T}_{\text{gcoh}} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{array} \right\}_G \quad \text{Flexion simple}$$

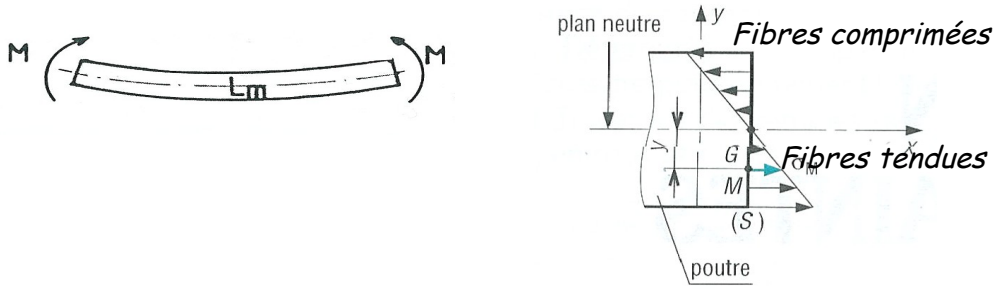
$$\left\{ \mathbf{T}_{\text{gcoh}} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{array} \right\}_G \quad \text{Flexion plane}$$

Contraintes :

Répartition des contraintes dans la section :

- La contrainte normale σ en un point M d'une section droite est proportionnelle à la distance y entre ce point et le plan moyen passant par G.
- Toutes les fibres situées à la distance y du plan moyen ont même contrainte.
- Si la fibre est tendue, la contrainte est positive. Si la fibre est comprimée, la contrainte est négative.





La fibre la plus sollicitée est également la plus éloignée du plan moyen.

Condition de résistance :

$$\sigma_{maxi} \leq Rpe$$

ou encore

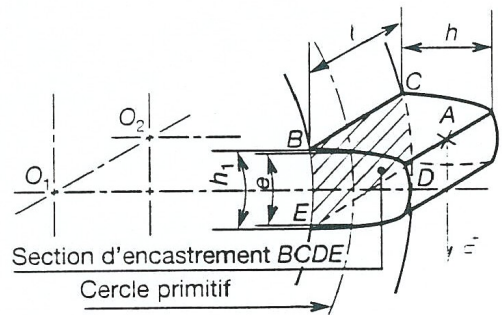
$$\sigma = \frac{Mfz}{\left(\frac{IGz}{v}\right)} \leq Rpe$$

$\left(\frac{IGz}{v}\right)$: module de flexion

v : distance entre le plan moyen et la fibre la plus éloignée (v = y maxi)

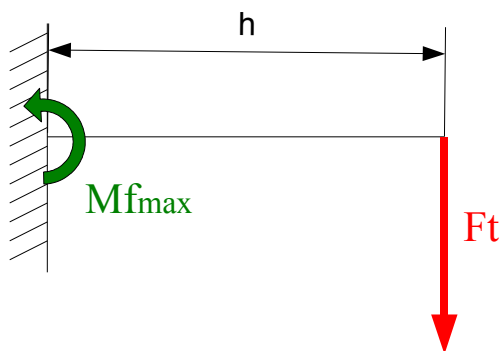
2. Application au calcul de denture :

- b : largeur de la dent : $b = k \cdot m$
- k : coefficient de largeur de denture $6 \leq k \leq 10$
- e : épaisseur de la dent $e = m \cdot \pi/2$
- h : hauteur de dent $h = 2,25 \cdot m$



La dent est modélisée comme une poutre encastree dans le moyeu de la roue dentee.

Calculer les valeurs suivantes : Mf_{max} ; I_{Gz} ; v .



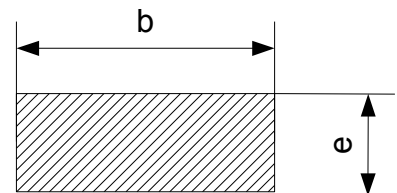
b : largeur de denture $b = k \cdot m$

e : épaisseur de la dent

$$Mf_{max} = h \cdot Ft$$

$$I_{Gz} = \frac{(b \cdot e^3)}{12}$$

$$v = \frac{e}{2}$$



Définir la condition de résistance :

$$\sigma = \frac{Mfz}{\left(\frac{IGz}{v}\right)} \leq Rpe \quad \text{donc :} \quad \frac{h \cdot Ft \cdot 12 \cdot e}{(b \cdot e^3 \cdot 2)} \leq Rpe$$

$$\frac{h \cdot Ft \cdot 6}{(b \cdot e^2)} \leq Rpe$$

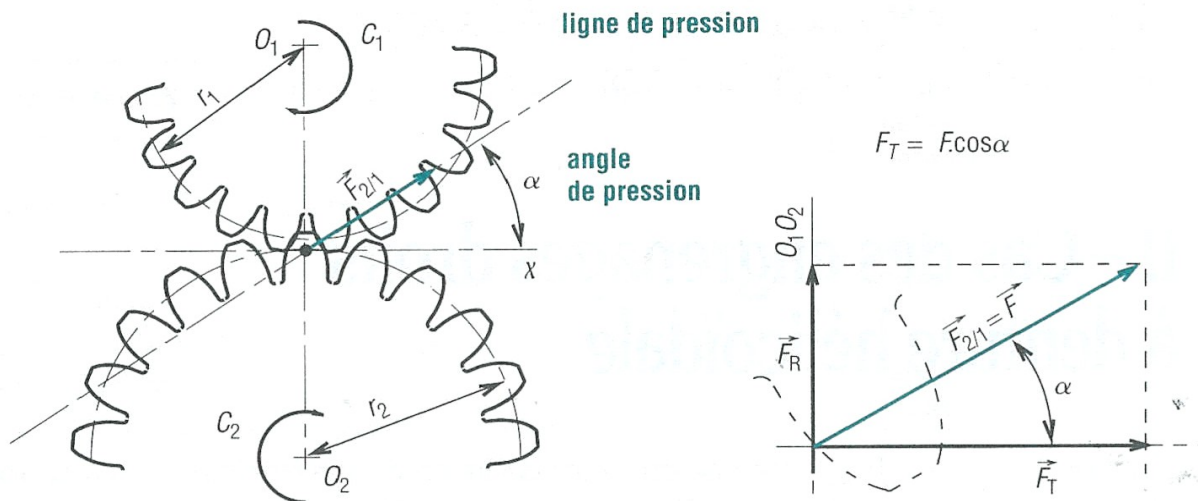
$$\frac{2,25 \cdot m \cdot Ft \cdot 6 \cdot 4}{(k \cdot m \cdot m^2 \cdot \Pi^2)} \leq Rpe$$

$$\frac{5,47 \cdot Ft}{(k \cdot m^2)} \leq Rpe$$

$$m \geq 2,34 \cdot \sqrt{\left(\frac{Ft}{(k \cdot Rpe)}\right)}$$

Exemple : Dimensionnement d'un engrenage.

Le couple supporté par le pignon1 est $C_1 = 60 \text{ mNm}$. Les engrenages sont en POM ($Re = 70 \text{ MPa}$). On prendra un coefficient de sécurité $s = 2$. Les caractéristiques du pignon sont : $Z_1 = 20$, $m = 0,5$. Calculer la largeur minimum de denture pour que l'engrenage résiste en flexion.



$$r_1 = \frac{20}{2} \cdot 0,5 \text{ mm}$$

Et $C_1 = 60 \text{ mNm}$ alors $Ft = \frac{C_1}{r_1} = 12 \text{ N}$

$$m \geq 2,34 \cdot \sqrt{\left(\frac{Ft}{(k \cdot Rpe)}\right)} \quad \text{donc :} \quad k \geq \frac{5,47 \cdot (Ft \cdot s)}{(m^2 \cdot \Re)} \quad k \geq \frac{5,47 \cdot (12 \cdot 2)}{(0,5^2 \cdot 70)} = 7,5$$

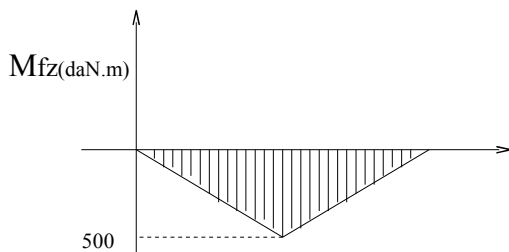
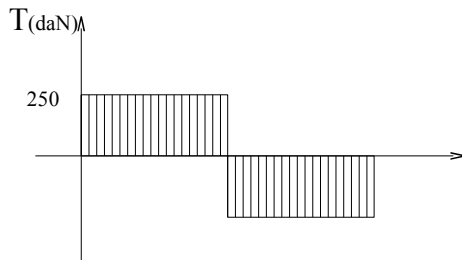
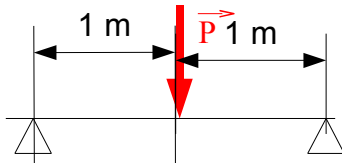
On prendra donc $k \text{ mini} = 8$, alors $l = k \cdot m = 8 \cdot 0,5 = 4 \text{ mm}$.
La largeur minimum de la denture est donc de 4 mm.

3. Diagrammes des sollicitations :

Pour une poutre donnée, on établit des diagrammes correspondant aux différentes sollicitations . Ils permettent d'évaluer rapidement la section la plus sollicitée pour laquelle sera effectué un calcul de vérification de résistance.

Exemple :

La poutre ci-dessous, de longueur 2 mètres, est sur deux appuis, soumise à une charge centrée de 500 daN.



Les diagrammes ci-contre montrent que la poutre est soumise à du cisaillement et à de la flexion. Il s'agit donc de flexion simple.

La section la plus sollicitée est la section centrale, pour laquelle le moment fléchissant vaut 500 daNm.

Pour que la poutre résiste, il faudra faire un choix de matériau et de géométrie qui valident la condition de résistance.

4. Déformations :

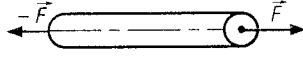
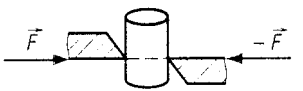
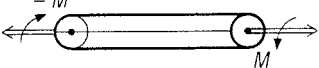
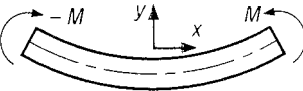

Les déformations d'une poutre soumise à de la flexion sont fonction :

- des actions appliquées
- de la longueur de la poutre.
- De la forme de sa section
- du matériau qui la constitue.

Exemple :

Poutre	Pente maxi	Flèche maxi	Équations
	$\theta_A = -\frac{FL^3}{16EI}$ $\theta_B = \theta_A$	$f_c = -\frac{FL^3}{48EI}$	$0 \leq x < L/2$ $y' = -\frac{F}{16EI} (L^2 - 4x^2)$ $y = -\frac{F \cdot x}{48EI} (3L^2 - 4x^2)$

VI. Récapitulatif des sollicitations élémentaires :

Cas	Exemple	Torseur de cohésion	Condition de résistance
Traction compression		$\left\{ T_{\text{gcoh}} \right\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$	$\sigma_{\text{maxi}} = \frac{N}{S} \leq R_{pe}$
Cisaillement		$\left\{ T_{\text{gcoh}} \right\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$	$\tau_{\text{maxi}} = \frac{T}{S} \leq R_{pg}$
Torsion		$\left\{ T_{\text{gcoh}} \right\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$	$\tau = \frac{Mt}{\left(\frac{IG}{v}\right)} \text{ ou } \leq R_{pg}$
Flexion pure		$\left\{ T_{\text{gcoh}} \right\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Mfz \end{Bmatrix}_G$	$\sigma = \frac{Mfz}{\left(\frac{IGz}{v}\right)} \leq R_{pe}$
Flexion simple		$\left\{ T_{\text{gcoh}} \right\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & Mfz \end{Bmatrix}_G$	$\sigma = \frac{Mfz}{\left(\frac{IGz}{v}\right)} \leq R_{pe}$

D- Sollicitations composées :

Les poutres sont parfois chargées de façon complexe et les sollicitations engendrées, appelées sollicitations composées, ne peuvent pas être étudiées et schématisées à l'aide de sollicitations élémentaires ci-dessus.

Cependant, dans un grand nombre de cas, les études peuvent être ramenées à la superposition de plusieurs sollicitations simples. On applique alors le Théorème de SUPERPOSITION, à savoir l'addition d'études de systèmes simples. Ceci concerne :

- les actions extérieures.
- Les contraintes.
- Les sollicitations (efforts normaux, tranchants, moments de torsion et fléchissants)
- les déformations.