1. GENERALITES

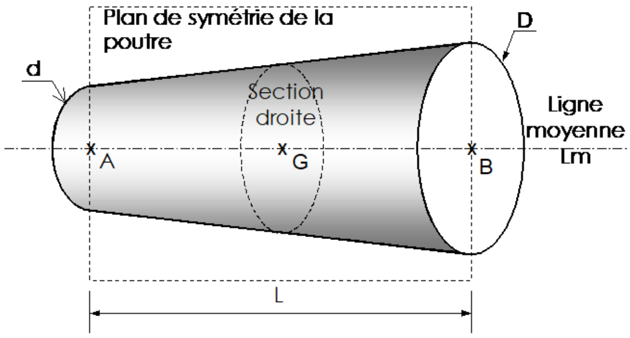
1. Notion de poutre

Les notions abordées dans ce cours ne sont valables que pour des solides ayant une forme de poutre ; c'est à dire un solide pour lequel :

☞ ....
....

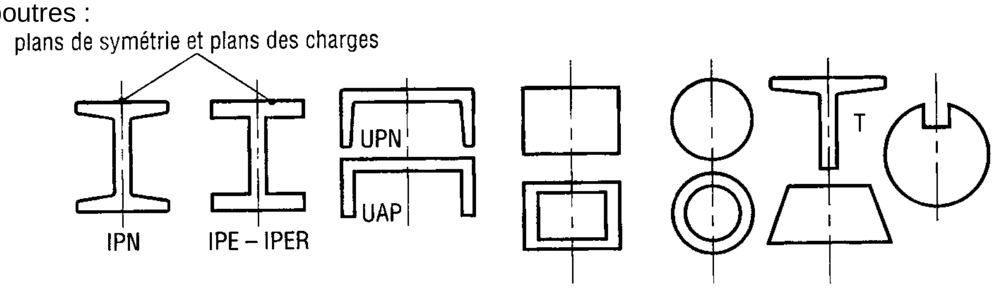
☞ ....
....

☞ ....
....

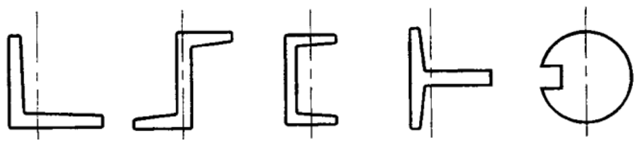


☞ ....

Exemples de poutres :



Exemples de poutres ne satisfaisant pas l'hypothèse de symétrie :



2. Hypothèses fondamentales

Les hypothèses de la résistance des matériaux, dans ce cours, sont les suivantes :

☞ ....

☞ ....
....

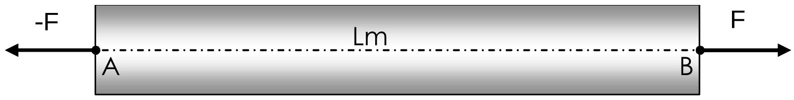
☞ ....

☞ ....

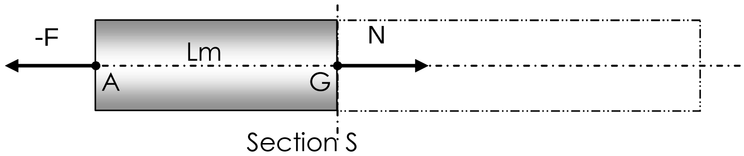
2. TRACTION

1. Définitions

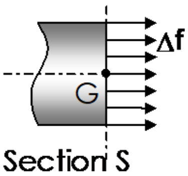
....
....



L'effort F est appelé *effort normal*, il est noté N. Quelle que soit la section considérée de la poutre, il s'exerce toujours N au barycentre G de la section.



2. Contrainte normale



Chaque élément de surface ΔS supporte un effort de traction Δf parallèle à la ligne moyenne. Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D'où :

$\boxed{\sigma = \quad}$

σ : ....
N : ....
S : ....

3. Condition de résistance

Soients :
- ☞ R_e .... (en Mpa) ;
- ☞ s .... ;
- ☞ R_{pe} ...., avec $R_{pe} = R_e/s$;

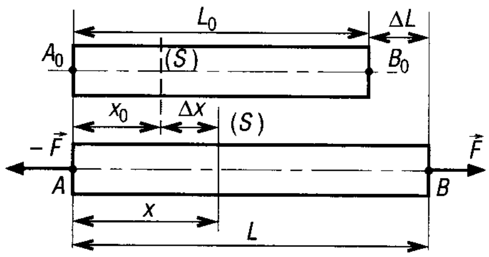
Alors, la condition de résistance s'écrit :

$$\boxed{\sigma_{maxi} \leq R_{pe}}$$

4. Déformation

Soients :
L_0 :................................ poutre (en mm)
L : .... déformation (en mm)
ΔL : .... (en mm)
ε : .... (sans unité)

$\boxed{\varepsilon = \text{........}}$ ou $\boxed{\Delta L = \text{........}}$



Loi de Hooke :
En déformation élastique, la contrainte σ varie linéairement en fonction de l'allongement relatif ε.

$\boxed{\sigma = \text{.......}}$

σ : ....
E : ....
ε : ....

Essai de Traction :

L’essai de traction permet, à lui seul, de définir les caractéristiques mécaniques courantes des matériaux. Les résultats issus de cet essai, permettent de prévoir le comportement d’une pièce sollicitée en Cisaillement, Traction / Compression et Flexion.

Principe de l’essai :
L’essai est réalisé sur une machine de traction. On applique progressivement et lentement (sans choc) à une éprouvette cylindrique de formes et de dimensions normalisées, un effort de traction croissant.

Machine de traction

Eprouvette

Eprouvette installée entre les mors de machine de traction

Caractéristiques mesurées

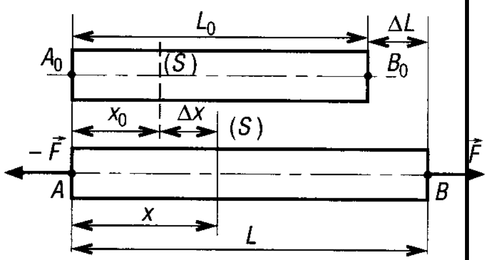
Les deux points A et B sont situés sur l’éprouvette.

L0 : Longueur initiale de l’éprouvette au repos (sans charge).

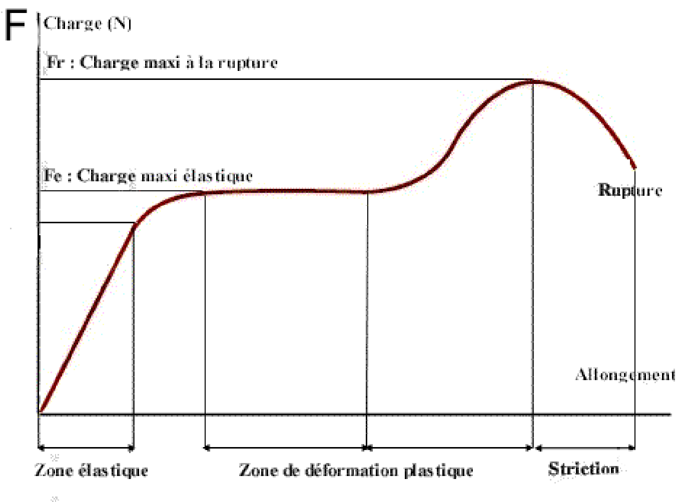
L : Longueur de l’éprouvette mesurée sous charge F.

F : Force exercée par la machine d’essai sur l’éprouvette.

Éprouvette au repos



3 Résultats de l’essai



Résistance Elastique $R_e = \dfrac{F_e}{S_0}$ $\begin{cases} F_e \text{ en } N \\ S_0 \text{ en } mm^2 \\ R_e \text{ en } MPa \end{cases}$

Résistance à la rupture $R_r = \dfrac{F_r}{S_0}$

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L} = \frac{\Delta L}{L}$$

Allongement pour cent $A\% = \dfrac{L_u - L_0}{L_0} \times 100$

L_u : *Longeur ultime après rupture*

Caractéristiques de quelques matériaux

Aciers d'usage général

Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
S 185 (A33)	290	185	190000
S 235 (E24)	340	235	190000
S 275 (E28)	410	275	190000
S 355 (E36)	490	355	190000

Aciers de construction mécanique

Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
E 295 (A50)	470	295	200000
E 335 (A60)	570	335	200000
E 360 (A70)	670	360	200000

Aciers pour traitements thermiques

Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
C 22 (XC 18)	410 à 980	255 à 600	210000
C 25 (XC 25)	460 à 690	285 à 370	210000
C 35 (XC 38)	570 à 830	335 à 490	210000
C 40 (XC 42)	620 à 880	355 à 520	210000
C 45 (XC 48)	660 à 930	375 à 580	210000
C 50 (XC 50)	700 à 980	395 à 600	210000

Aciers faiblement alliés

	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
48 Cr 2 (38 C 2)	600 à 900	350 à 550	210000
100 Cr 6 (100 C6)	850 à 1250	550 à 850	210000
13 Ni Cr 14 (14 NC 11)	800 à 1450	650 à 900	210000
20 Ni Cr Mo 7 (18 NCD 6)	800 à 1500	700 à 900	210000
36 Ni Cr Mo 16 (35 NCD 16)	1000 à 1750	800 à 1250	210000
34 Cr Mo 4 (35 CD 4)	700 à 1200	500 à 850	210000

Aciers fortement alliés

Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
X 2 Cr Ni 19.11 (Z3 CN 19-11)	440 à 640	185	
X 6 Cr Ti 18.10 (Z6 CNT 18-10)	490 à 690	205	

Fontes

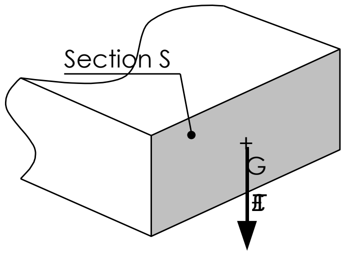
Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
EN GJL 200 (FGL 200)	200	130	100000
EN GJL 400 (FGL 400)	400	260	140000
EN GJS 500-7 (FGS 500-7)	500	320	168000
EN GJS 900-2 (FGS 900-2)	900	600	170000
EN GJMW 250-10 (MB 400-10)	400	220	170000
EN GJMB 350-10 (MN 350-10)	350	230	170000
EN GJMB 650-3 (MN 650-3)	650	430	170000

Nota : La nuance entre parenthèses correspond à l'ancienne norme de désignation des matériaux

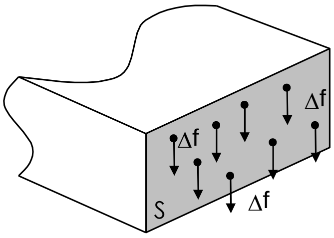
3. CISAILLEMENT

1. Définitions

....
....
......
....



2. Contrainte de cisaillement



Chaque élément de surface ΔS supporte un effort de cisaillement Δf contenu dans le plan (S).
Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D'où :

T = ... / ...

T : .... en Mpa ou N/mm²
T : ....
S : .... en mm²

3. Condition de résistance

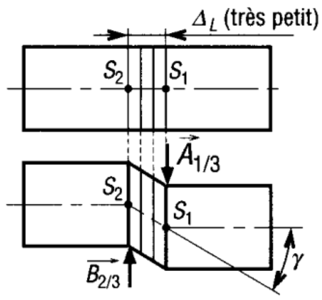
Soient :
- ☞ R_{eg} la résistance élastique au cisaillement du matériau (en Mpa) ;
- ☞ s un coefficient de sécurité ;
- ☞ ©$_{adm}$ = R_{pg} la résistance pratique au cisaillement, avec $R_{pg} = R_{eg}/s$;

Alors, la condition de résistance s'écrit :

....

4. Déformation

En déformation élastique, la contrainte de cisaillement © varie linéairement en fonction de l'angle de glissement γ.



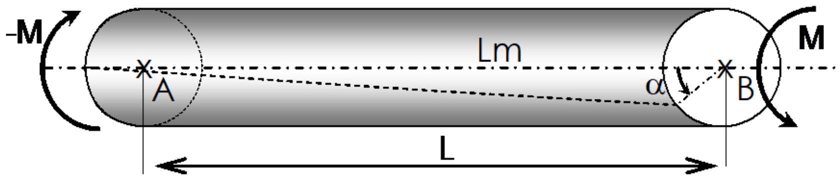
T = ...

T : .... en N/mm²
G : .... en Mpa
γ : ....

4. TORSION

1. Définitions

....
....

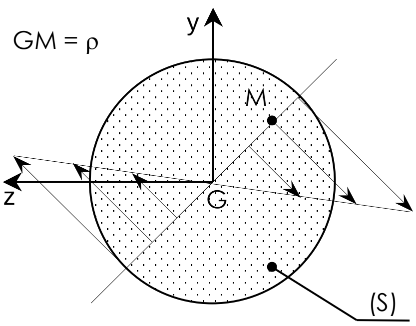


Le moment M est appelé *moment de torsion*, et est noté M_t.

Soit α l'angle de rotation entre les deux extrémités de la poutre.

2. Contrainte tangentielle de torsion

Soit $\theta = \frac{\alpha}{L}$ = angle *unitaire* de torsion.



$\boxed{\tau = ...}$

τ : contrainte tangentielle en N/mm²
G : module d'élasticité transversal en Mpa
θ : angle unitaire de torsion en rad/mm
ρ : rayon GM en mm

$\boxed{M_t = ...}$

M_t : Moment de torsion en N.mm
G : module d'élasticité transversal en Mpa
θ : angle unitaire de torsion en rad/mm
I_0 : moment quadratique par rapport au point G en mm⁴

d'où : $\boxed{\tau = \frac{....}{...} .....}$

3. Condition de résistance

Soient :
- R_{eg} la résistance élastique au cisaillement du matériau (en Mpa) ;
- s un coefficient de sécurité ;
- R_{pg} la résistance pratique au cisaillement, avec $R_{pg} = R_{eg}/s$;

$\boxed{..................}$

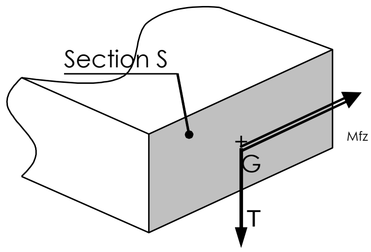
4. Déformation

L'angle unitaire de torsion θ est caractéristique de la déformation. Sa méthode de calcul dépend de la géométrie de la section (forme, section ouverte ou fermée, etc…). Ce calcul ne sera pas abordé dans ce cours.

5. FLEXION SIMPLE

1. Définitions

....
....
....
....



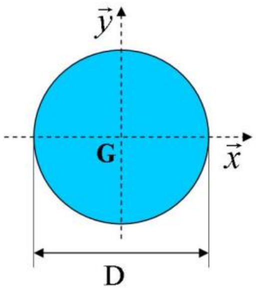
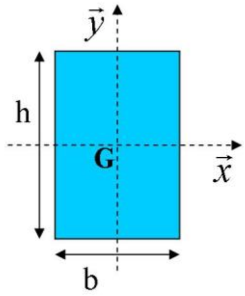
2. Contraintes normales

σ = ...

σ : ....
E : ....
y : ....
θ : ....

σ = ...

M_{fz} : ....
Igz : ....

Moment quadratique d'une section circulaire :	Moment quadratique d'une section rectangulaire :
$I_x = \dfrac{\pi \cdot D^4}{64}$ $I_y = \dfrac{\pi \cdot D^4}{64}$ $I_G = \dfrac{\pi \cdot D^4}{32}$ 	$I_x = \dfrac{b \cdot h^3}{12}$ $I_y = \dfrac{h \cdot b^3}{12}$ $I_G = \dfrac{b \cdot h}{12} \cdot (b^2 + h^2)$ 

3. Condition de résistance

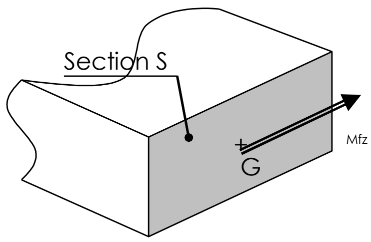
Soient :
- ☞ R_e la résistance élastique à l'extension du matériau (en Mpa) ;
- ☞ s un coefficient de sécurité ;
- ☞ R_{pe} la résistance pratique à l'extension, avec $R_{pe} = R_e/s$;

....

6. FLEXION PURE

1. Définitions

....
....
....
....
....

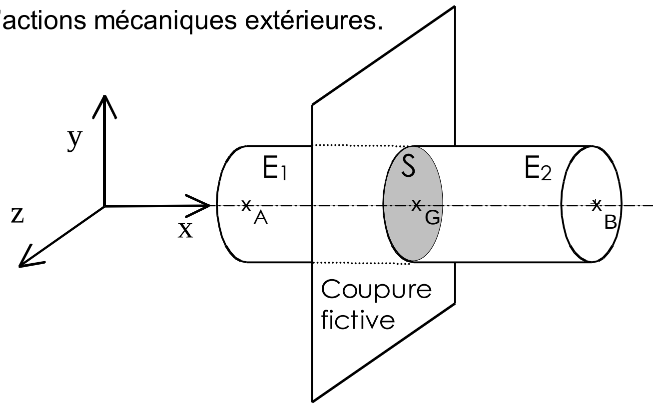


7. EFFORTS INTERIEURS OU TORSEUR DE COHESION

1. Définitions

Considérons une poutre P, en équilibre sous l'effet d'actions mécaniques extérieures.

Pour mettre en évidence les efforts transmis par la matière au niveau de la section S, nous effectuons **une coupure imaginaire** dans un plan perpendiculaire à la ligne moyenne. Elle sépare la poutre en deux tronçons E1 et E2, tel que E=E1+E2.



Isolons le tronçon E1.

Les actions mécaniques que le tronçon E2 exerce sur le tronçon E1 à travers la section droite S sont des actions mécaniques intérieures à la poutre P.

Nous en ignorons à priori la nature, cependant la liaison entre E1 et E2 peut être modélisée par une liaison complète. On peut donc modéliser l'action mécanique E2 sur E1 par un torseur appelé :

Torseur de cohésion : $\{\tau_{Coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(E2\to E1)} \\ \vec{M}_{G(E2\to E1)} \end{Bmatrix} = -{}_G\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(E1\to E2)} \\ \vec{M}_{G(E1\to E2)} \end{Bmatrix}$ avec G sur la ligne moyenne.

2. Détermination du torseur de cohésion

Pour ce faire, deux méthodes sont envisageables.

Isolement du tronçon Gauche E1

Appliquons le PFS au tronçon E1 : $\{\tau_{(\overline{E1}\to E1)}\} = \{\tau_{(\overline{E}\to E1)}\} + \{\tau_{(E2\to E1)}\} = \{0\}$

D'où $\{\tau_{Coh}\} = -\{\tau_{(\overline{E}\to E1)}\} = -{}_G\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(\overline{E}\to E1)} \\ \vec{M}_{G(\overline{E}\to E1)} \end{Bmatrix}$

Isolement du tronçon Droit E2

Appliquons le PFS au tronçon E2 : $\{\tau_{(\overline{E2}\to E2)}\} = \{\tau_{(\overline{E}\to E2)}\} + \{\tau_{(E1\to E2)}\} = \{0\}$

Soit $\{\tau_{(E1\to E2)}\} = -\{\tau_{(\overline{E}\to E2)}\}$

D'où $\{\tau_{Coh}\} = \{\tau_{(\overline{E}\to E2)}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(\overline{E}\to E2)} \\ \vec{M}_{G(\overline{E}\to E2)} \end{Bmatrix}$

3. Composantes du torseur de cohésion

$$\{\tau_{Coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}$$

N : *Effort Normal sur* $(G,\vec{x})$ — M_t : *Moment de Torsion sur* $(G,\vec{x})$

T_y : *Effort Tranchant sur* $(G,\vec{y})$ — M_{fy} : *Moment de Flexion sur* $(G,\vec{y})$

T_z : *Effort Tranchant sur* $(G,\vec{z})$ — M_{fz} : *Moment de Flexion sur* $(G,\vec{z})$

8. NATURE DES SOLLICITATIONS

En fonction de « l'allure » du torseur de cohésion, une typologie des **sollicitations** est établie.

On appelle **sollicitation simple** l'état de contrainte d'une poutre dont le torseur de cohésion ne comporte qu'un élément.

Nature des sollicitations	Effort Normal	Effort Tranchant	Moment de Torsion	Moment de Flexion	Torseur de cohésion
Traction (N>0) **Compression (N<0)**	N	$T_y=0$ $T_z=0$	$M_t=0$	$M_{fy}=0$ $M_{fz}=0$	$\{\tau_{Coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
	N=0	T_y ou T_z	$M_t=0$	$M_{fy}=0$ $M_{fz}=0$	$\{\tau_{Coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$
Torsion simple	N=0	$T_y=0$ $T_z=0$	M_t	$M_{fy}=0$ $M_{fz}=0$	$\{\tau_{Coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Flexion pure	N=0	$T_y=0$ $T_z=0$	$M_t=0$	M_{fy} ou M_{fz}	$\{\tau_{Coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$

On appelle **Sollicitation composée** l'état de sollicitation d'une poutre soumise à **plusieurs sollicitations simples** (par exemple : Traction + flexion pure).